6.5 – 6.6

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Ορισμοί

- Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

- Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** σε κύκλο, όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

2.
Θεωρήματα

Τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο ⇔
- οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές
- η πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες
- εξωτερική γωνία του ισούται με την απέναντι εσωτερική
- οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται από το ίδιο σημείο

3.
Εφαρμογές

Τετράπλευρο είναι περιγράψιμο ⇔
- Το άθροισμα των δύο απέναντι πλευρών ισούται με το άθροισμα των άλλων δύο
- Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

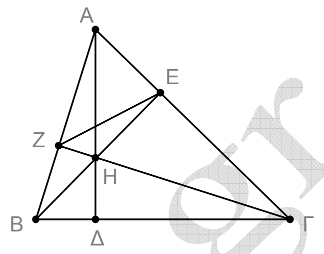
1.

Σε κάθε τρίγωνο να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν

i) μία κορυφή, τα ίχνη των υψών που φέρονται από τις δύο άλλες κορυφές και το ορθόκεντρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο

ii) δύο κορυφές και τα ίχνη των υψών που φέρονται από αυτές είναι εγγράψιμο σε κύκλο

Ποια είναι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων;



Προτεινόμενη λύση

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ , τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ και το ορθόκεντρό του Η.

i)

Το τετράπλευρο ΒΔΗΖ είναι εγγράψιμο,

διότι $B\hat{Z}H + H\hat{\Delta}B = 90^o + 90^o = 180^o$

Αφού $B\hat{Z}H = 90^o$, το κέντρο του κύκλου θα είναι το μέσο της ΒΗ.

ii)

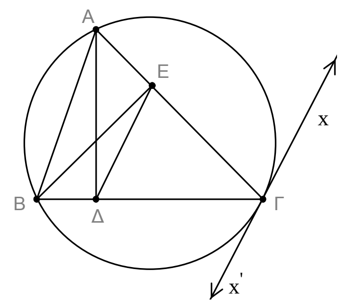
Το τετράπλευρο ΒΖΕΓ είναι εγγράψιμο, διότι $B\hat{Z}\Gamma = 90^o = B\hat{E}\Gamma$

Αφού $B\hat{Z}\Gamma = 90^o$, το κέντρο του κύκλου θα είναι το μέσο της ΒΓ.

2.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΒΕ. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη στην εφαπτόμενη του περιγεγραμμένου κύκλου στο σημείο Γ.

Προτεινόμενη λύση



$A\hat{E}B = A\hat{\Delta}B = 90^o \Rightarrow$ ΑΕΔΒ εγγράψιμο

$A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}\Gamma$

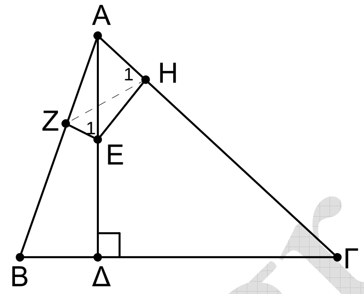
Αλλά $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}x$

Άρα $\Delta\hat{E}\Gamma = A\hat{\Gamma}x \Rightarrow$ ΔΕ // x΄x

3.

Αν Ε είναι σημείο του ύψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ και Ζ, Η οι προβολές του Ε στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Η, Ζ είναι ομοκυκλικά

Προτεινόμενη λύση



$A\hat{Z}E + A\hat{H}E = 90^o + 90^o = 180^o \Rightarrow$

ΑΖΕΗ εγγράψιμο $\Rightarrow$

$\hat{E}_1 = \hat{H}_1$ **(1)**

$B\hat{Z}E + E\hat{\Delta}B = 90^o + 90^o = 180^o \Rightarrow$

ΒΖΕΔ εγγράψιμο $\Rightarrow$

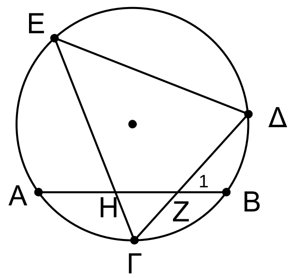
$\hat{B} = \hat{E}_1$ **(2)**

Από τις (1) και (2) έχουμε $\hat{B} = \hat{H}_1$, άρα το ΒΖΗΓ είναι εγγράψιμο δηλαδή τα σημεία Β, Γ, Η, Ζ είναι ομοκυκλικά .

4.

Από το μέσο Γ ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$ φέρνουμε τις χορδές ΓΔ και ΓΕ που τέμνουν την ΑΒ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΗΖΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο .

Προτεινόμενη λύση



Από γνωστή εφαρμογή έχουμε ότι

$(\hat{Z}_1) = \dfrac{(\overset{\frown}{\Delta B}) + (\overset{\frown}{A\Gamma})}{2}$ και επειδή $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma B}$

$(\hat{Z}_1) = \dfrac{(\overset{\frown}{\Delta B}) + (\overset{\frown}{\Gamma B})}{2} = \dfrac{(\overset{\frown}{\Delta\Gamma})}{2}$

Αλλά $(\hat{E}) = \dfrac{(\overset{\frown}{\Delta\Gamma})}{2}$

Οπότε $\hat{E} = \hat{Z}_1$, άρα το τετράπλευρο ΕΗΖΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο

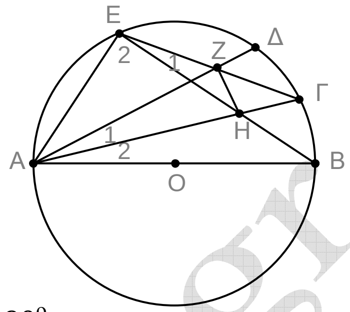
5.

Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ. Έστω Γ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B\Delta}}$ και Ε τυχαίο σημείο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A\Delta}}$. Οι ΑΓ, ΒΕ τέμνονται στο Η και οι ΑΔ, ΓΕ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι

i) Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο

ii) Το Η ισαπέχει από το Ζ και την ΑΒ

Προτεινόμενη λύση



i)

$\overset{\frown}{\Gamma \mathrm{B}} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1$

Άρα το τετράπλευρο ΑΕΖΗ εγγράψιμο

ii)

$\hat{\mathrm{E}}_2 = 90^o$ αφού βαίνει σε ημικύκλιο

Αλλά από το εγγράψιμο ΑΕΖΗ είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H} = \hat{\mathrm{E}}_2 = 90^o$,

δηλαδή $\mathrm{HZ} \perp \mathrm{A\Delta}$

ΗΖ απόσταση του Η από την ΑΔ

$\overset{\frown}{\Gamma \mathrm{B}} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2$

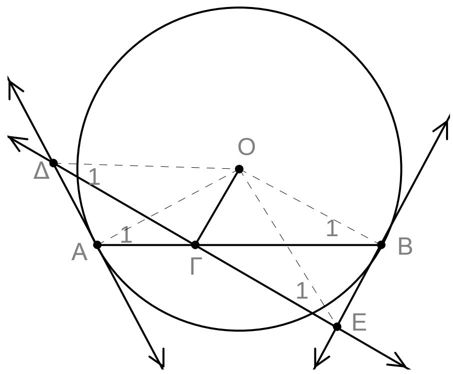
ΑΗΓ διχοτόμος της $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$

το Η ισαπέχει από τις ΑΔ, ΑΒ

6.

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε μία χορδή ΑΒ και σημείο Γ της χορδής. Από το Γ φέρνουμε κάθετη στην ΟΓ, η οποία κάθετος τέμνει τις εφαπτόμενες στα Α και Β στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΓΔ = ΓΕ

Προτεινόμενη λύση



Φέρνουμε τις ΟΑ, ΟΒ, ΟΔ, ΟΕ.
Η ΟΔ φαίνεται από τα Α, Γ
με ίσες γωνίες ορθές $\Rightarrow$
ΟΓΑΔ εγγράψιμο **(1)**

$\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{E} + \mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 90^o + 90^o = 180^o \Rightarrow$

ΟΓΕΒ εγγράψιμο **(2)**

Τρίγωνο ΟΑΒ ισοσκελές $\Rightarrow$

$\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1$ **(3)**

Από τις (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1$

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1$

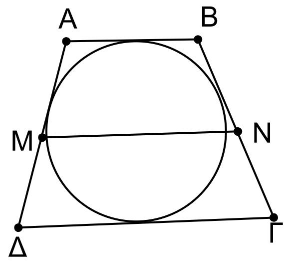
τρίγωνο ΟΔΕ ισοσκελές

το ύψος του ΟΓ είναι και διάμεσος

7.

Αν ισοσκελές τραπέζιο είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο, να αποδείξετε ότι η διάμεσός του είναι ίση με μία από τις μη παράλληλες πλευρές του.

Προτεινόμενη λύση



Έστω το παραπάνω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΔ = ΒΓ$ και $ΜΝ$ η διάμεσός του

Είναι $ΜΝ = \dfrac{ΑΒ + ΔΓ}{2}$ **(1)**

Επειδή το τραπέζιο είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο, ισχύει $ΑΒ + ΔΓ = ΑΔ + ΒΓ$.

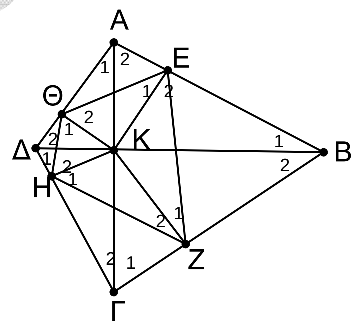
Και επειδή $ΑΔ = ΒΓ$ θα έχουμε $ΑΒ + ΔΓ = 2ΑΔ$

Τότε η (1) γίνεται $ΜΝ = \dfrac{2ΑΔ}{2} = ΑΔ$

8 .

Σε τετράπλευρο του οποίου οι διαγώνιες είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι οι προβολές του σημείου τομής των διαγωνίων στις πλευρές του τετραπλεύρου ορίζουν τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο.

Προτεινόμενη λύση



Έστω ΑΒΓΔ το δοσμένο τετράπλευρο με $ΑΓ \perp ΒΔ$, Κ το σημείο τομής των διαγωνίων και ΕΖΗΘ το τετράπλευρο που έχει κορυφές τις προβολές του Κ στις πλευρές του ΑΒΓΔ.

$Κ\hat{Η}Γ + Κ\hat{Ζ}Γ = 90^o + 90^o = 180^o \Rightarrow$
ΚΗΓΖ εγγράψιμο.

Ομοίως για τα ΚΖΒΕ, ΚΕΑΘ, ΚΘΔΗ.

Οπότε $Θ\hat{Η}Ζ + Θ\hat{Ε}Ζ = \hat{Η}_1 + \hat{Η}_2 + \hat{Ε}_1 + \hat{Ε}_2$

$= \hat{Γ}_1 + \hat{Δ}_2 + \hat{Α}_1 + \hat{Β}_2$

$= (\hat{Γ}_1 + \hat{Β}_2) + (\hat{Δ}_2 + \hat{Α}_1)$ **(1)**

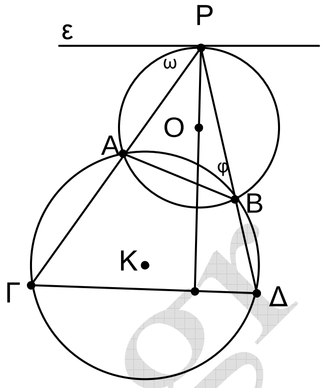
Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΒΓ, ΑΚΔ είναι $\hat{Γ}_1 + \hat{Β}_2 = 90^o$ και $\hat{Δ}_2 + \hat{Α}_1 = 90^o$

Η (1) γίνεται $Θ\hat{Η}Ζ + Θ\hat{Ε}Ζ = 180^o$, άρα το ΘΕΖΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

9.

Θεωρούμε δύο κύκλους κέντρων Ο, Κ αντίστοιχα, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από σημείο Ρ του κύκλου Ο φέρνουμε τέμνουσες ΡΑΓ, ΡΒΔ του κύκλου Κ. Να αποδείξετε ότι $ΟΡ \perp ΓΔ$

Προτεινόμενη λύση



Στο Ρ φέρουμε την εφαπτόμενη (ε) του κύκλου Κ και το τμήμα ΑΒ.

Είναι $\hat{φ} = \hat{ω}$ **(1)** (η μία είναι εγγεγραμμένη και η άλλη υπό χορδής και εφαπτομένης)

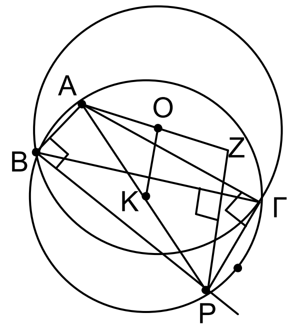
ΑΒΔΓ εγγεγραμμένο $\Rightarrow$ $\hat{Γ} = \hat{φ}$ **(2)**

Από τις (1) και (2) έχουμε $\hat{ω} = \hat{Γ}$, άρα (ε) // ΓΔ.
Όμως η ακτίνα ΟΡ είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) άρα θα είναι κάθετη και στη ΓΔ // (ε)

10.

Θεωρούμε έναν κύκλο κέντρου Ο και δύο σημεία Β, Γ αυτού. Έστω Α ένα εσωτερικό σημείο του κύκλου. Στα σημεία Β, Γ φέρνουμε κάθετες στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Ρ και από το Ρ φέρνουμε κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει την ΟΑ σε σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΟΑ = ΟΖ

Προτεινόμενη λύση



Στο τετράπλευρο ΑΒΡΓ έχουμε
$Α\hat{Β}Ρ + Α\hat{Γ}Ρ = 90^o + 90^o = 180^o$,
οπότε το ΑΒΡΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο κέντρου Κ και διαμέτρου ΑΡ.
Η διάκεντρος ΟΚ των κύκλων είναι κάθετη στην κοινή χορδή ΒΓ.
Επειδή δε και η ΡΖ είναι κάθετη στην ΒΓ, θα είναι ΚΟ // ΡΖ.
Στο τρίγωνο ΑΡΖ, το Κ είναι μέσο του ΑΡ και ΚΟ // ΡΖ, άρα το Ο θα είναι μέσο του ΑΖ, οπότε ΟΑ = ΟΖ